

$$f(a) = \int_0^{\pi} (x - a \sin x)^2 dx \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^{\pi} (x^2 - 2ax \sin x + a^2 \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^{\pi} \left(x^2 + a^2 \times \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx - 2a \int_0^{\pi} x \sin x dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{a^2}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \right]_0^{\pi} - 2a \int_0^{\pi} x (-\cos x)' dx \\ &= \frac{\pi^3}{3} + \frac{a^2}{2} \pi + 2a [x \cos x]_0^{\pi} - 2a \int_0^{\pi} \cos x dx \\ &= \frac{\pi^3}{3} + \frac{a^2}{2} \pi + 2a \pi \times (-1) - 2a [\sin x]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2} a^2 - 2\pi a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } f'(a) &= \pi a - 2\pi \\ &= \pi(a - 2) \quad \text{より} \end{aligned}$$

a	...	2	...
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	$\searrow$	最小	$\nearrow$

増減表は左下のようになり

$f(2)$ が最小値となる。

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2} \times 4 - 2\pi \times 2 \\ &= \frac{\pi^3}{3} - 2\pi - 4\pi \\ &= \frac{\pi^3}{3} - 6\pi \quad \text{である。} \end{aligned}$$

ゆえに 求める a の値は $a = 2$