

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)f(t)dt + f(x) = e^{-x} \sin x \quad \text{①}$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt \right\} + f(x) = e^{-x} \sin x$$

$$1 \times \int_0^x f(t)dt + \cancel{x f(x)} - \cancel{x f(x)} + f(x) = e^{-x} \sin x$$

$$\int_0^x f(t)dt + f(x) = e^{-x} \sin x$$

この両辺を微分すると

$$f(x) + f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$$

両辺 e^x をかけ

$$e^x f(x) + e^x f'(x) = \cos x - \sin x$$

$$\text{よって} \quad \frac{d}{dx} \{ e^x f(x) \} = \cos x - \sin x \quad \text{が成り立つ。}$$

$$(2) \quad (1) \text{より} \quad e^x f(x) = \int (\cos x - \sin x) dx \quad \text{より}$$

$$e^x f(x) = \sin x + \cos x + C \quad (C \text{ は定数})$$

②

①式に $x=0$ 代入すると

$$0 + f(0) = e^{-0} \sin 0 \quad \text{より}$$

$$f(0) = 0 \quad \text{であるから}$$

②に $x=0$ 代入すると

$$e^0 \cdot f(0) = 0 = \sin 0 + \cos 0 + C \quad \text{より}$$

$$0 = 0 + 1 + C \quad \text{から} \quad C = -1$$

$$\text{よって} \quad f(x) = e^{-x} (\sin x + \cos x - 1) \quad \text{と表せる。}$$

$$f'(x) = -e^{-x} (\sin x + \cos x - 1) + e^{-x} (\cos x - \sin x)$$

$$= e^{-x} (-\sin x - \cancel{\cos x} + 1 + \cancel{\cos x} - \sin x)$$

$$= e^{-x} (1 - 2\sin x)$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{と} \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{より} \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad \text{では} \quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi.$$

ゆえに 増減表は下のようになる

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗	0

$$f(0) = e^{-0}(\sin 0 + \cos 0 - 1) = 1 \times (0 + 1 - 1) = 0$$

$$f(2\pi) = e^{-2\pi}(\sin 2\pi + \cos 2\pi - 1) = e^{-2\pi}(0 + 1 - 1) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{-\frac{\pi}{6}}\left(\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} - 1\right) = e^{-\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = e^{-\frac{\pi}{6}} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2} > 0$$

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = e^{-\frac{5}{6}\pi}\left(\sin \frac{5}{6}\pi + \cos \frac{5}{6}\pi - 1\right) = e^{-\frac{5}{6}\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = e^{-\frac{5}{6}\pi} \times \frac{-\sqrt{3}-1}{2} < 0$$

であるから

$$\text{最大値は } \frac{-1+\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{\pi}{6}} \quad (x = \frac{\pi}{6} \text{ のとき})$$

$$\text{最小値は } \frac{-1-\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{5}{6}\pi} \quad (x = \frac{5}{6}\pi \text{ のとき})$$

となる。