

$$c+d=4, \quad (c \leq d) \quad \tau''$$

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2} \quad \text{不定積分が有理式}$$

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2} = \frac{A}{(x-c)^2} + \frac{B}{(x-d)^2} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d} \quad \text{とす}$$

$$(x-a)(x-b) = A(x-d)^2 + B(x-c)^2 + C(x-c)(x-d)^2 + D(x-c)^2(x-d)$$

①

$$x=d \text{ 代入して } (d-a)(d-b) = B(d-c)^2$$

$$B = \frac{(d-a)(d-b)}{(d-c)^2} \quad \text{--- ③}$$

$$x=c \text{ 代入して } (c-a)(c-b) = A(c-d)^2$$

$$A = \frac{(c-a)(c-b)}{(c-d)^2} \quad \text{--- ④}$$

①式 両辺 x で微分して

$$\begin{aligned} (x-a) + (x-b) &= 2A(x-d) + 2B(x-c) \\ &\quad + C \{ (x-d)^2 + 2(x-c)(x-d) \} \\ &\quad + D \{ (x-c)^2 + 2(x-c)(x-d) \} \end{aligned} \quad \text{--- ②}$$

②式に $x=d$ 代入して

$$\begin{aligned} d-a + d-b &= 2B(d-c) + D(d-c)^2 \\ 2d-a-b &= 2 \cdot \frac{(d-a)(d-b)}{d-c} + D(d-c)^2 \end{aligned}$$

$$D \cdot (d-c)^2 = \frac{(d-c)(2d-a-b) - 2(d-a)(d-b)}{d-c}$$

$$D = \frac{(d-c)(2d-a-b) - 2(d-a)(d-b)}{(d-c)^3} \quad \text{--- ⑤}$$

$$x = C \text{ 代入して } (c-a) + (c-b) = 2A(c-d) + C(c-d)^2$$

$$2c - a - b = 2 \times \frac{(c-a)(c-b)}{c-d} + C(c-d)^2$$

$$C(c-d)^2 = \frac{(c-d)(2c-a-b) - 2(c-a)(c-b)}{c-d}$$

$$C = \frac{(c-d)(2c-a-b) - 2(c-a)(c-b)}{(c-d)^3} \quad \text{--- (b)}$$

題意より $c \neq d$ ならば $C = D = 0$ である。

$$c+d=4, c \leq d \text{ より } (c,d) = (0,4), (1,3), (2,2) \text{ と 7 通り}$$

i) $(c,d) = (0,4)$ のとき

$$C = \frac{-4 \times (-a-b) - 2(-a) \times (-b)}{(-4)^3}$$

$$= \frac{4a+4b-2ab}{-64}$$

$$= \frac{2a+2b-ab}{-32} = \frac{ab-2a-2b}{32}$$

$$= \frac{(a-2)(b-2) - 4}{32}$$

$$D = \frac{4(8-a-b) - 2(4-a)(4-b)}{4^3}$$

$$= \frac{32 - 4a - 4b - 32 + 8a + 8b - 2ab}{64}$$

$$= \frac{4a+4b-2ab}{64}$$

$$= \frac{ab-2a-2b}{-32}$$

$$= \frac{(a-2)(b-2) - 4}{-32}$$

$C = D = 0$ とおけるためには

$$(a-2)(b-2) - 4 = 0$$

である。

$$(a-2)(b-2) = 4$$

$$-2 \leq a-2 \leq 2$$

$$-2 \leq b-2 \leq 2 \text{ より}$$

$$(a-2, b-2) = (2, 2), (-2, -2)$$

$$\therefore (a, b) = (4, 4), (0, 0)$$

ii) $(c, d) = (1, 3)$ のとき

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{(-2) \cdot (2-a-b) - 2(1-a)(1-b)}{(-2)^3} \\
 &= \frac{-4 + 2a + 2b - 2 + 2a + 2b - 2ab}{-8} \\
 &= \frac{-2ab + 4a + 4b - 6}{-8} \\
 &= \frac{ab - 2a - 2b + 3}{4} = \boxed{\frac{(a-2)(b-2) - 1}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{2(6-a-b) - 2(3-a)(3-b)}{8} \\
 &= \frac{6-a-b-9+3a+3b-ab}{4} \\
 &= \frac{ab-2a-2b+3}{-4} = \boxed{\frac{(a-2)(b-2) - 1}{-4}}
 \end{aligned}$$

$C = D = 0$ となるためには $(a-2)(b-2) = 1$ である。

$$-2 \leq a-2 \leq 2$$

$$-2 \leq b-2 \leq 2 \text{ より } (a-2, b-2) = (1, 1), (-1, -1)$$

$$\text{よって } \boxed{(a, b) = (3, 3), (1, 1)}$$

iii) $(c, d) = (2, 2)$ のとき

$$C = D = 0 \text{ となり } C = D = 0$$

よって $(a, b) = (0, 0), \sim, (4, 4)$ の 25通り。

ゆえに $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 4), (4, 4, 0, 4),$
 $(3, 3, 1, 3), (1, 1, 1, 3), (a, b, 2, 2)$ の
 29通り

(ただし、 a, b は $0 \sim 4$ の整数)