

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx \text{ について}$$

$$(1) I_0 = \int_0^1 x^0 e^{-x} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + 1 = \boxed{1 - \frac{1}{e}}$$

$$\begin{aligned} (2) I_n &= \int_0^1 x^n (-e^{-x})' dx \\ &= [-x^n e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 n x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= -1^n \cdot e^{-1} + n \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= -\frac{1}{e} + n I_{n-1} \end{aligned} \quad \text{よって} \quad \boxed{I_n = -\frac{1}{e} + n I_{n-1}} \quad \text{--- ①}$$

(3) ①の両辺に e をかけると

$$e I_n = -1 + n e I_{n-1}$$

両辺から $e n!$ をひくと

$$e I_n - e n! = -1 - e n! + n e I_{n-1}$$

$$e (I_n - n!) = -1 - e n! + n e I_{n-1}$$

$$e (n! - I_n) = 1 + n e \{ (n-1)! - I_{n-1} \}$$

$$\text{よって } a_n = e (n! - I_n) \text{ とおくと}$$

$$\boxed{a_n = 1 + n a_{n-1}} \quad \text{--- ②} \quad \text{となる。} \quad *$$

(4) ②の両辺 $n!$ でわると

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{1}{n!} + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{より}$$

$$\frac{a_n}{n!} - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{n!} \quad \text{かなりたつて}$$

$$n \geq 1 \text{ のとき } \frac{a_n}{n!} = \frac{a_0}{0!} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \quad \text{かなりたつ}$$

$$\text{よって } a_n = n! \left(a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right) \quad \text{より}$$

$$a_n = n! \left\{ e (0! - I_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right\} \quad \text{--- ③}$$

③を②に代入す

$$e(n! - I_n) = n! \left(e - eI_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right) \quad \text{よって}$$

$$n! - I_n = \frac{n!}{e} \left\{ e - e\left(1 - \frac{1}{e}\right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right\}$$

$$I_n = n! - \frac{n!}{e} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right)$$

$$\text{よって } I_5 = 5! - \frac{5!}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \right)$$

$$= 5! - \frac{5!}{e} \times \frac{5! + 5! + 5 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 + 5 + 1}{5!}$$

$$= 120 - \frac{1}{e} \times (120 + 120 + 60 + 20 + 5 + 1)$$

$$= \boxed{120 - \frac{326}{e}}$$