

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx \quad \text{のとき}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx \\ &= \int_0^1 x^{n+1} (-e^{-x})' dx \\ &= [-x^{n+1} e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^n e^{-x} dx \\ &= -1^{n+1} e^{-1} + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx \\ &= -\frac{1}{e} + (n+1) I_n \end{aligned}$$

$$\text{よって } I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n \text{ になりたつ.}$$

①

(2) ①の両辺を $(n+1)!$ でわると

$$\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} = -\frac{1}{e(n+1)!} + \frac{I_n}{n!}$$

よって $\left\{ \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} \right\}$ は階差数列となるから

i) $n \geq 2$ のとき

$$\frac{I_n}{n!} = \frac{I_1}{1!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{e(k+1)!} \quad \text{であり.}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x e^{-x} dx = \int_0^1 x (-e^{-x})' dx \\ &= [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= -1 \times e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 \\ &= -\frac{1}{e} - e^{-1} + e^0 \\ &= -\frac{2}{e} + 1. \quad \text{--- ② ①から} \end{aligned}$$

$$\frac{I_n}{n!} = 1 - \frac{2}{e} - \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} \quad \text{より}$$

$$I_n = \frac{n!}{e} \left\{ e - 2 - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right\}$$

$$I_n = \frac{n!}{e} \left\{ e - 1 - \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right\}$$

$$I_n = \frac{n!}{e} \left(e - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right) \quad \text{--- ③ ②よりたつ.}$$

ii) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}\textcircled{3} \text{ 式は } I_1 &= \frac{1!}{e} \left(e-1 - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k!} \right) \\ &= \frac{1}{e} \left(e-1 - \frac{1}{1} \right) \\ &= 1 - \frac{2}{e} \quad \text{となるから}\end{aligned}$$

これは ② 式と一致するので ③ は $n=1$ のときもなりたつ。

ゆえに、すべての自然数で

$$I_n = \frac{n!}{e} \left(e-1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right) \quad \text{がなりたつ。}$$