(1) $f_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kt(n-1)}$

これは 初項 $e^{-kt\times 0} = 1$, 公比 e^{-kt} の無限等比級数の和だから

$$f_k(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\times\{1-(e^{-kt})^n\}}{1-e^{-kt}}$$

$kt>0$ より $0 < e^{-kt} = \frac{1}{e^{kt}} < 1$ だから

$n\to\infty$ で $(e^{-kt})^n \to 0$

ゆえに $\boxed{f_k(t) = \frac{1}{1-e^{-kt}}}$

(2) $$F_k(x) = \int_1^x \frac{1}{1-e^{-kt}}\,dt$$

$$= \int_1^x \frac{e^{kt}}{e^{kt}-1}\,dt$$

ここで $e^{kt}-1 = u$ とおくと

$du = ke^{kt}\cdot dt$ より

t	$1 \cdots x$
u	$e^k-1 \cdots e^{kx}-1$

$$F_k(x) = \int_{e^k-1}^{e^{kx}-1} \frac{1}{k}\frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{k}\Big[\log u\Big]_{e^k-1}^{e^{kx}-1}$$

$$= \frac{1}{k}\{\log(e^{kx}-1) - \log(e^k-1)\}$$

$$= \frac{1}{k}\log\frac{e^{kx}-1}{e^k-1}$$

(3) $$\lim_{k\to\infty} F_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\log\frac{e^{kx}-1}{e^k-1}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\log\frac{e^{kx}\left(1-\frac{1}{e^{kx}}\right)}{e^k\left(1-\frac{1}{e^k}\right)}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left\{\log\left(\frac{e^{kx}}{e^k}\right)^{\frac{1}{k}} + \frac{1}{k}\log\frac{1-\frac{1}{e^{kx}}}{1-\frac{1}{e^k}}\right\}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left\{\log\frac{e^x}{e} + \log\left(\frac{1-\frac{1}{e^{kx}}}{1-\frac{1}{e^k}}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}$$

$$= \log e^x - \log e$$

$$= \boxed{x-1}$$