

$$\begin{aligned}
(1) \quad I_{n+1} &= \int_1^2 (\log x)^{n+1} dx \\
&= \int_1^2 (x)' (\log x)^{n+1} dx \\
&= [x (\log x)^{n+1}]_1^2 - \int_1^2 x \cdot (n+1) (\log x)^n \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= 2 (\log 2)^{n+1} - 1 \times (\log 1)^{n+1} - (n+1) \int_1^2 (\log x)^n dx \\
&= 2 \cdot (\log 2)^{n+1} - (n+1) I_n
\end{aligned}$$

$$\text{よって } I_{n+1} = 2 \cdot (\log 2)^{n+1} - (n+1) I_n \quad \text{--- ①}$$

$$(2) \quad \text{与式より } \frac{(-1)^n}{n!} I_n = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-\log 2)^k}{k!} + 1 \quad \text{--- } (*) \text{ を示せばよい}$$

①式の両辺に $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ をかけると

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} I_{n+1} &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2 \cdot (\log 2)^{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} (n+1) I_n \\
\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} I_{n+1} &= 2 \cdot \frac{(-\log 2)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} I_n \quad \text{より} \\
\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} I_{n+1} - \frac{(-1)^n}{n!} I_n &= 2 \cdot \frac{(-\log 2)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{--- ② がなりたつ。}
\end{aligned}$$

よって $\left\{ \frac{(-1)^n}{n!} I_n \right\}$ が階差数列となっているから

$$\begin{aligned}
\text{i) } n \geq 2 \text{ のとき } \quad \frac{(-1)^n}{n!} I_n &= \frac{(-1)^1}{1!} I_1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-\log 2)^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= -I_1 + 2 \sum_{k=2}^n \frac{(-\log 2)^k}{k!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_1 &= \int_1^2 \log x dx \\
&= \int_1^2 x' \log x dx \\
&= [x \log x]_1^2 - \int_1^2 x \times \frac{1}{x} dx \\
&= 2 \log 2 - 1 \times \log 1 - [x]_1^2 \\
&= 2 \log 2 - (2-1) \\
&= 2 \log 2 - 1 \quad \text{だから} \\
\frac{(-1)^n}{n!} I_n &= 1 - 2 \log 2 + 2 \sum_{k=2}^n \frac{(-\log 2)^k}{k!} \\
&= 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-\log 2)^k}{k!} + 1
\end{aligned}$$

ii) $n=1$ のとき

$$(*) \text{ の左辺 } = \frac{(-1)^1}{1!} I_1 = -I_1 = 1 - 2 \log 2 = 2 \sum_{k=1}^1 \frac{(-\log 2)^k}{k!} + 1 = (*) \text{ の右辺}$$

となりたつ。

よってすべての自然数 n で与式はなりたつ