$f(x)=\log(1+x)+\log(1+x^2)+\log(1+x^4)+\cdots+\log(1+x^{2^n})+\cdots$

(1)

この無限級数の第n項までの和を S_n とすると

$$S_n=\log(1+x)+\log(1+x^2)+\log(1+x^4)+\cdots+\log(1+x^{2^n})$$
$$=\log\{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})\}$$
$$=\log\{1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{1+2+2^2+\cdots+2^n}\}$$

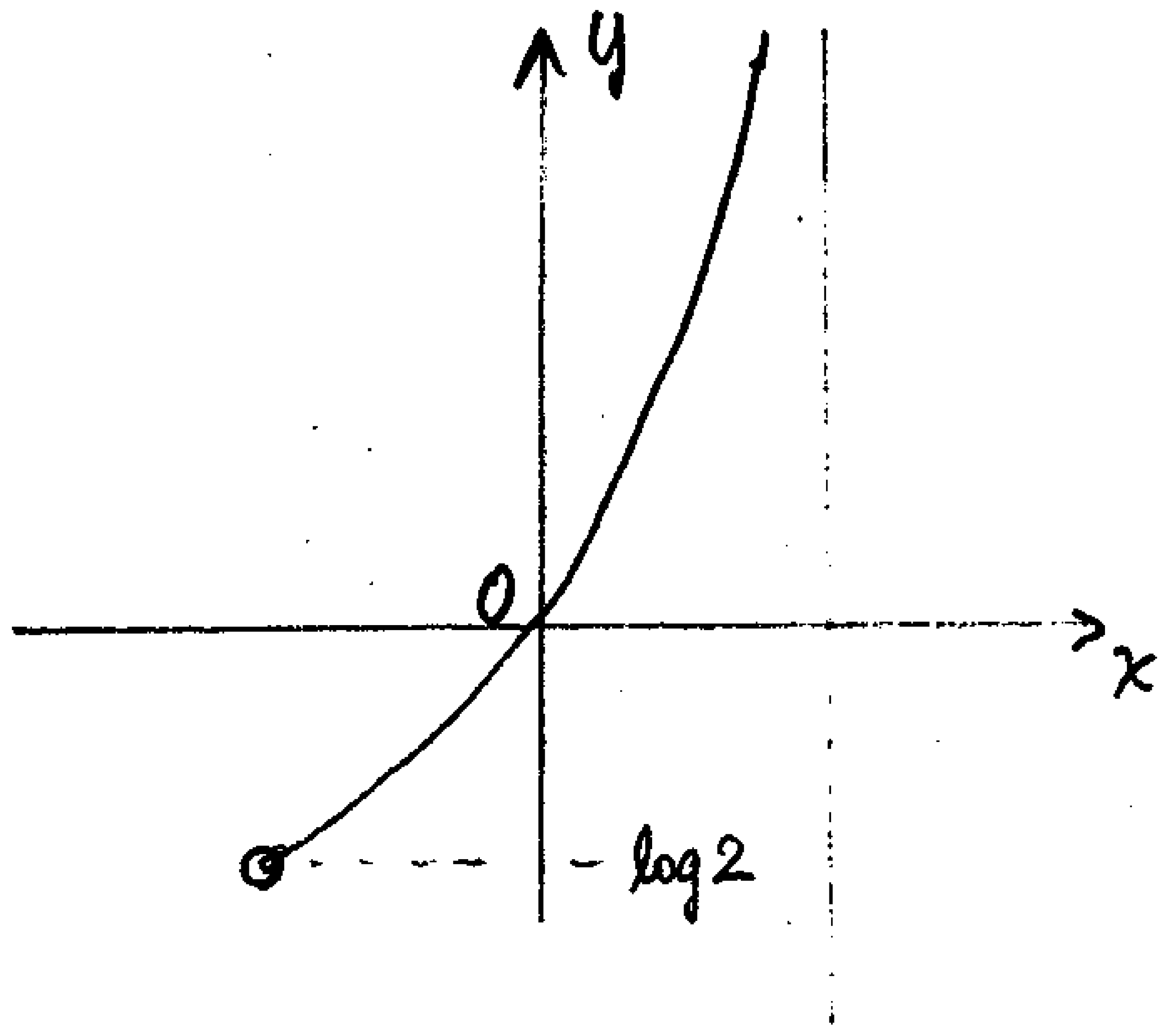
$1+x+x^2+\cdots+x^{1+2+2^2+\cdots+2^n}$ が収束すればよい。
これは公比 x の級数だから

収束条件は $\boxed{|x|<1}$

(2) $$f(x)=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{2^{n+1}-1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\right)$$

$|x|<1$ より $\lim_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$ だから

$$f(x)=\log\frac{1}{1-x}$$
$$=\log(1-x)^{-1}$$
$$=\boxed{-\log(1-x)}$$



(3)
$$\int f(x)\,dx$$
$$=-\int\log(1-x)\,dx$$
$$=-\int\{-(1-x)\}'\log(1-x)\,dx$$
$$=(1-x)\log(1-x)-\int(1-x)\times\frac{-1}{1-x}\,dx$$
$$=(1-x)\log(1-x)+\int dx$$
$$=\boxed{(1-x)\log(1-x)+x+C}$$