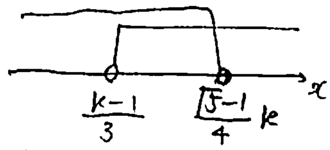
1 [1]

(1) $k-x<2x+1$ をとくと $3x>k-1$ より $x>\dfrac{k-\boxed{1}}{\boxed{3}}$ ア イ であり

$\sqrt{5}x<k-x$ をとくと

$(\sqrt{5}+1)x<k$

よって $x<\dfrac{k}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{\sqrt{5}\boxed{-1}}{\boxed{4}}k$ 　ウエ オ



ゆえに $\sqrt{5}x<k-x<2x+1$ ① をみたす x が存在するとき

$\dfrac{k-1}{3}<\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}k$ 　より

$4k-4<(3\sqrt{5}-3)k$

$(3\sqrt{5}-7)k>-4$

$k<\dfrac{-4}{3\sqrt{5}-7}=\dfrac{-4(3\sqrt{5}+7)}{45-49}$

よって $k<\boxed{7}+\boxed{3}\sqrt{5}$ 　カ キ

(2) ① をみたす x の範囲の幅が $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ より大きくなるとき

$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}k-\dfrac{k-1}{3}>\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ だから

$(3\sqrt{5}-3-4)k+4>4\sqrt{5}$

$(3\sqrt{5}-7)k>4(\sqrt{5}-1)$

$3\sqrt{5}-7<3\times2.3-7<0$ より

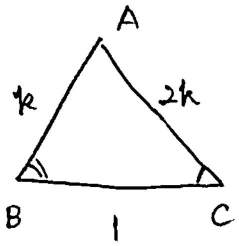
$k<\dfrac{4(\sqrt{5}-1)}{3\sqrt{5}-7}=\dfrac{4(\sqrt{5}-1)(3\sqrt{5}+7)}{45-49}$

$k<-(15-7-3\sqrt{5}+7\sqrt{5})$

$k<\boxed{-8}-\boxed{4}\sqrt{5}$ 　となる
クケ コ

解答記号	正解	配点
アイ	13	2
ウエオ	−14	2
カキ	73	3
クケコ	−84	3
		10点

(3)



正弦定理から $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC} = \dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$ だから

$AC\sin\angle ACB = AB\sin\angle ABC$

ここで $\sin\angle ABC = 2\sin\angle ACB$ より

$AC\sin\angle ACB = 2AB\sin\angle ACB$

$\sin\angle ACB \neq 0$ より　$AC = 2AB$.

よって $AB = k$, $AC = 2k$ とおける $(k>0)$

ゆえに 余弦定理から $\cos\angle ABC = \dfrac{k^2+1-(2k)^2}{2k} = \dfrac{\overset{\text{タ}}{\boxed{1}}-\overset{\text{チ}}{\boxed{3}}AB^2}{2AB}$ である

$AB^2 = x$ とおくと　△ABCの面積Sについて

$S^2 = \left(\dfrac{1}{2}\times 1\times k\sin\angle ACB\right)^2$

$= \dfrac{1}{4}\times k^2\sin^2\angle ACB$

$= \dfrac{1}{4}x\,(1-\cos^2\angle ACB)$

$= \dfrac{x}{4}\times\left\{1-\dfrac{(1-3AB^2)^2}{4AB^2}\right\}$

$= \dfrac{x}{4}\times\dfrac{4x-(1-3x)^2}{4x}$

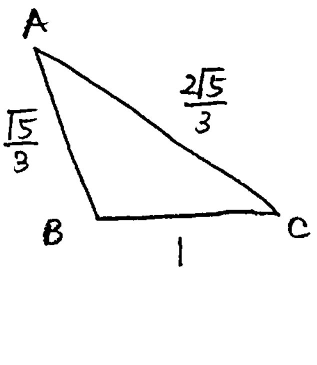
$= \dfrac{4x-(1-6x+9x^2)}{16} = -\overset{\text{ツ}}{\underset{\text{テト}}{\boxed{\dfrac{9}{16}}}}x^2 + \overset{\text{ナ}}{\underset{\text{ニ}}{\boxed{\dfrac{5}{8}}}}x - \dfrac{1}{16}$ である

よって　$S = -\dfrac{9}{16}\left(x^2 - \dfrac{16}{9}\times\dfrac{5}{8}x\right) - \dfrac{1}{16}$

$= -\dfrac{9}{16}\left\{\left(x-\dfrac{5}{9}\right)^2 - \dfrac{25}{81}\right\} - \dfrac{1}{16}$

$= -\dfrac{9}{16}\left(x-\dfrac{5}{9}\right)^2 + \dfrac{25}{16\times 9} - \dfrac{9}{16\times 9}$　より

$x = \boxed{\dfrac{5}{9}}\,\dfrac{\text{ヌ}}{\text{ネ}}$ のとき，つまり $AB = \boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}\,\dfrac{\text{ノ}}{\text{ハ}}$ のとき Sは最大となる



このとき $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \dfrac{4\times 5}{9} = \dfrac{20}{9}$

$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + 1^2 = \dfrac{5+9}{9} = \dfrac{14}{9}$ より

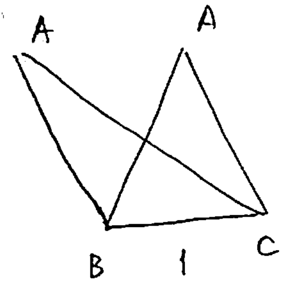
$\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2 > \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + 1^2$ をみたすから

∠ABCは $\boxed{\text{鈍角}}$，∠ACBは $\boxed{\text{鋭角}}$

$\boxed{\text{ヒ}}$ は②　　$\boxed{\text{フ}}$ は⓪

1 [2]

(1)



$\sin\angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4}$ のとき

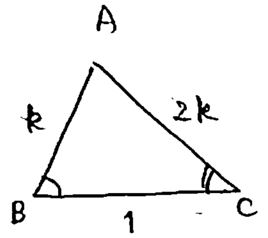
$\sin^2\angle ABC + \cos^2\angle ABC = 1$ より、

$\cos^2\angle ABC = 1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$

よって　$\cos\angle ABC = \pm\boxed{\frac{1}{4}}$ サ シ

(2)

(i)　$\sin\angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4}$，$\sin\angle ACB = \frac{\sqrt{15}}{8}$ のとき，正弦定理より

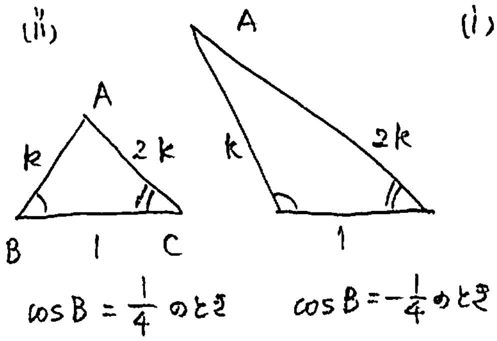


$$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{AB}{\sin\angle ACB}$$ だから

$AC \times \sin\angle ACB = AB \times \sin\angle ABC$

よって　$AC \times \frac{\sqrt{15}}{8} = AB \times \frac{\sqrt{15}}{4}$　より　$AC = \boxed{2}AB$
ス

(ii)



(i) より　$AB = k$，$AC = 2k$　$(k>0)$ とおける

余弦定理より

$(2k)^2 = k^2 + 1^2 - 2\times1\times k\cos\angle ABC$ であり

$\cos\angle ABC = \frac{1}{4}$ のとき

$4k^2 = k^2 + 1 - 2k\times\frac{1}{4}$ から

$3k^2 + \frac{1}{2}k - 1 = 0$

$6k^2 + k - 2 = 0$　$\left(\begin{smallmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{smallmatrix}\right)$

$(2k-1)(3k+2) = 0$

$k>0$ より　$k = \frac{1}{2}$

$\cos\angle ABC = -\frac{1}{4}$ のとき

$4k^2 = k^2 + 1 - 2k\times\left(-\frac{1}{4}\right)$ から

$3k^2 - \frac{1}{2}k - 1 = 0$

$6k^2 - k - 2 = 0$　$\left(\begin{smallmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{smallmatrix}\right)$

$(2k+1)(3k-2) = 0$

$k>0$ より　$k = \frac{2}{3}$

$\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2}\times1\times k\times\sin\angle ABC$ なので

k が大きい方が面積が大きいので

このときの AB は　$AB = \boxed{\frac{2}{3}}$ セ ソ

解答記号	正解	配点
サシ	14	2
ス	2	3
セソ	23	3
タチ	13	3
ツテトナニ	91658	3
ヌネノハ	5953	3
ヒフ	20	3
		20点

2[1]

$y = ax^2 + bx + c$ —①

(100, 1250) を通るから　$1250 = 10000a + 100b + c$ —㋐

(200, 450) を通るから　$450 = 40000a + 200b + c$ —㋑

(300, 50) を通るから　$50 = 90000a + 300b + c$ —㋒　である

㋐−㋑より　$800 = -30000a - 100b$ —㋓

㋑−㋒より　$400 = -50000a - 100b$ —㋔

また㋓−㋔より　$400 = 20000a$　だから　$a = \frac{400}{20000} = \frac{1}{50}$

よって㋔から　$400 = -50000 \times \frac{1}{50} - 100b$　より

$400 = -1000 - 100b$

$100b = -1400$　よって　$b = \boxed{-14}$ (アイウ)

㋒より　$c = 50 - 90000 \times \frac{1}{50} - 300 \times (-14)$

$= 50 - 1800 + 4200 = 2450$

利益は　$y(x-80) - 5000$

$= (ax^2 + bx + c)(x-80) - 5000$　より　$\boxed{3}$ (エ) 次式

ここで ①の右辺のかわりに x の $\boxed{1}$ (オ) 次式をつかえば、利益は x の2次式となる

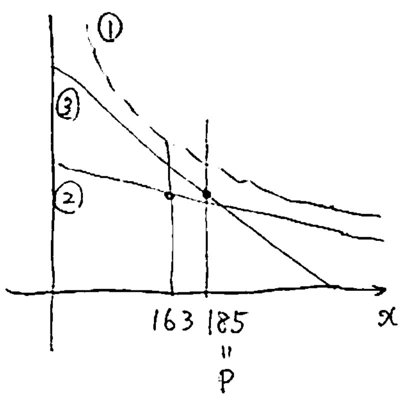
①の右辺のかわりに　$y = -4x + 1160$ —②　の右辺をつかうと

利益を z とすると　$z = (-4x + 1160)(x - 80) - 5000$

$= -\boxed{4}x^2 + \boxed{1480}x - 97800$　(カ　キクケコ)

$= -4(x - \boxed{185})^2 + 39100$　(サシス)

よって z が最大となる x は $\boxed{185}$ (サシス)



② をつかったときは $x = 163$ で最大値 50112

②も③もグラフは①より下側にあるから

①よりも計算された利益は小さくなる

よって　$\boxed{x = 163 \text{ なら利益は } 50112 \text{ 以上}}$

$\boxed{x = p = 185 \text{ なら利益は } 39100 \text{ 以上}}$　が正しい

$\boxed{セ}\boxed{ソ}$ は ③④

④式なら $x=195$ で 利益は最大 74350．

よって 利益の最大値Mは 74350 より小さい

これと $\boxed{セ}$ の③から

利益の最大値Mは $\boxed{\text{50112 より大きく 74350 より小さい}}$

$\boxed{タ}$ は②

解答記号	正解	配点
アイウ	−14	3
エオ	31	1
カキクケコ	41480	2
サシス	185	3
セソ	34 or 43	4
タ	2	2

15点

2[2]

(1) データの値の総和は $\boxed{\text{賛成の人の数}}$ と一致し

チ は ⓪

平均値 $\bar{x} = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ は $\boxed{n\text{人中における賛成の人の割合}}$ と一致する

ツ は ③

(2) $m = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ とおくと $\bar{x} = \dfrac{m}{n}$ である

また分散を s^2 とすると、1の個数は m 個，0の個数は $(n-m)$ 個であることから

$$s^2 = \frac{1}{n}\left\{\boxed{m}(1-\bar{x})^2 + \boxed{(n-m)}(0-\bar{x})^2\right\}$$

テ は①　　ト は②

$$= \frac{1}{n}\left\{m\left(1-\frac{m}{n}\right)^2 + (n-m)\left(-\frac{m}{n}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{m \times \frac{(n-m)^2}{n^2} + (n-m) \times \frac{m^2}{n^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{m(n-m)}{n^2}\left\{(n-m)+m\right\}$$

$$= \boxed{\frac{m(n-m)}{n^2}}$$

ナ は② となる

解答記号	正解	配点
チツ	03	2
テト	12	2
ナ	2	2
		6点

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
-1	-1	$-1-a$	$-1-a$	$(1+a)^2=1+2a+a^2$
-1	1	$-1-a$	$1-a$	$-(1-a)(1+a)=-1+a^2$
1	-1	$1-a$	$-1-a$	$-(1-a)(1+a)=-1+a^2$
1	1	$1-a$	$1-a$	$(1-a)^2=1-2a+a^2$
$5a$	$5a$	$5a-a$	$5a-a$	$16a^2=16a^2$
合計 $5a$	$5a$	0	0	$20a^2$
平均 a	a			$4a^2$

W'の x の平均 $\bar{x}$ は $\boxed{a}$

$\boxed{ニ}$ は ③

共分散 S_{xy} は

左の表より $\boxed{4a^2}$

$\boxed{ヌ}$ は ⓪

$$S_x^2=\frac{2(1+a)^2+2(1-a)^2+16a^2}{5}=\frac{20a^2+4}{5} \quad より \quad S_x=\sqrt{\frac{20a^2+4}{5}}$$

また $S_y^2=S_x^2$ より $S_y=\sqrt{\frac{20a^2+4}{5}}$

よって $S_xS_y=\frac{20a^2+4}{5}=\boxed{4a^2+\frac{4}{5}}$ $\boxed{ネ}$ は ②

ゆえに 相関係数 r は $r=\frac{S_{xy}}{S_xS_y}=\frac{4a^2}{\frac{20a^2+4}{5}}=\frac{20a^2}{20a^2+4}$

よって $r\geqq 0.95$ のとき

$$\frac{20a^2}{20a^2+4}\geqq 0.95 \quad より$$

$$20a^2\geqq \frac{\cancel{95}^{19}}{\cancel{100}_{20}}\times(20a^2+4)$$

$$20a^2\geqq 19a^2+\frac{19}{5}$$

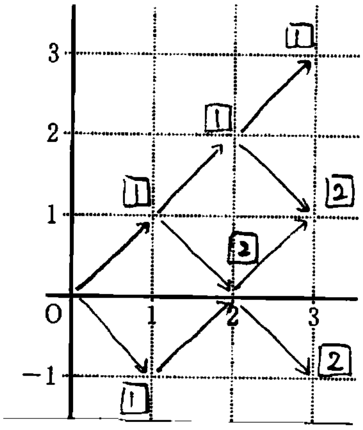
$$a^2-\frac{19}{5}\geqq 0$$

ゆえに $\boxed{a\leqq-\frac{\sqrt{95}}{5},\ \frac{\sqrt{95}}{5}\leqq a}$ となる

$\boxed{ノ}$ は ③

解答記号	正解	配点
ニ	3	2
ヌ	0	3
ネ	2	2
ノ	3	2
		9点

3



(1) (i) 点(3,3)に至る移動の仕方は $\boxed{1}_{ア}$ 通り

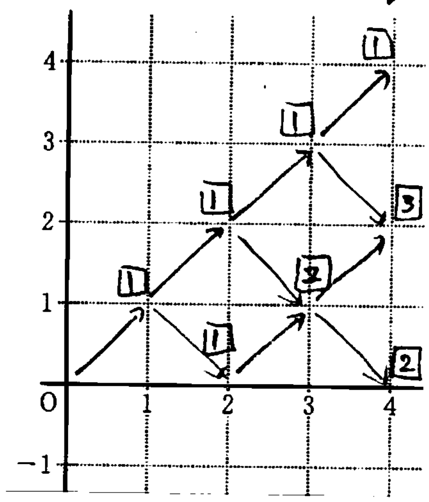
(3,1)に至るのは $\boxed{3}_{イ}$ 通り

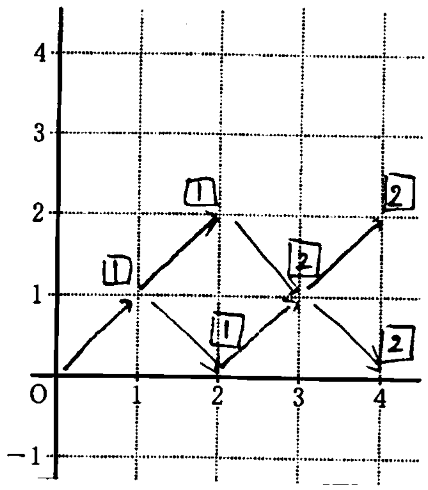
(3,−1)に至るのは $\boxed{2}_{ウ}$ 通り

よって 条件(*) $y_i \geqq -1$ $(i=1,2,3)$ をみたす

確率は $\frac{1+3+2}{2^3}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

(ii) $y_i \geqq 0$ $(i=1,2,3,4)$ の確率は $\frac{1+3+2}{2^4}=\frac{6}{16}=\boxed{\frac{3}{8}}$ エオ





また $y_1 \geqq 0$, $y_2 \geqq 0$,

$y_3 \geqq 1$, $y_4 \geqq 0$ の確率は

$\frac{2+2}{2^4}=\frac{4}{16}=\boxed{\frac{1}{4}}$ カキ

$y_i \geqq 0$ $(i=1,2,3,4)$ であったとき

$y_3=1$ である条件つき確率は

$\frac{\frac{4}{16}}{\frac{6}{16}}=\frac{4}{6}=\boxed{\frac{2}{3}}$ クケ

である

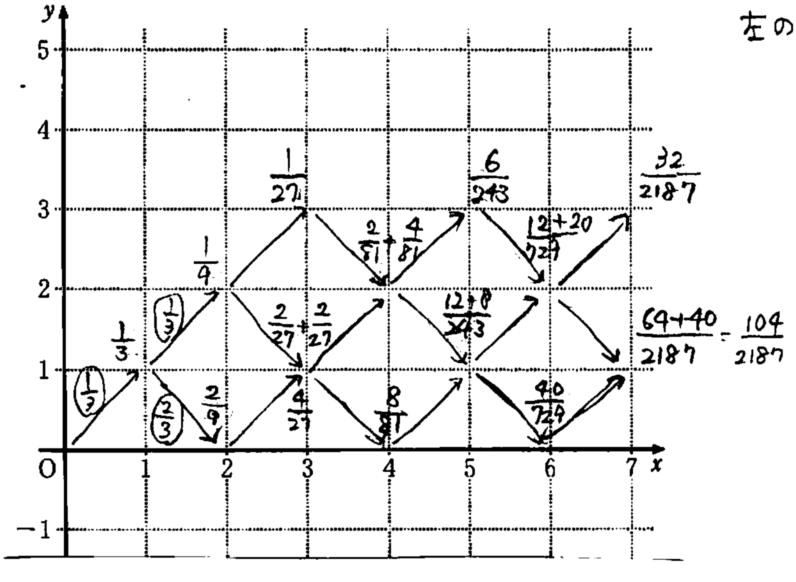
(iii) 4回なげて(4,2)のとき 表は $\boxed{3}_{コ}$ 回、うらは1回でている。

(2)(i) 7回なげて Qの座標が3になるのは 3の倍数が5回、それ以外が2回 だから

$${}_7C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7\cdot\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}\cdot 1}\times\frac{4}{3^7}=\frac{28}{3^6}=\boxed{\frac{28}{729}}$$ サシスセソ

(ii) 7回のあいだ Qが常に0以上3以下であり、7回目でQが3であるのは

左の表より $\boxed{\frac{32}{2187}}$ タチツテトナ であり —Ⓐ

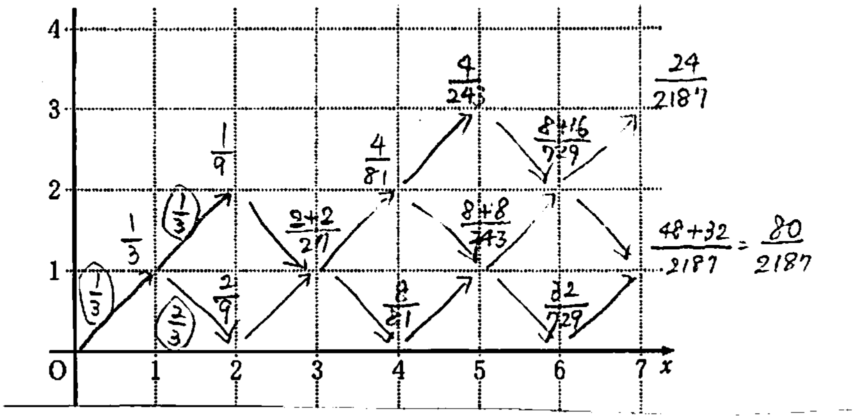


Ⓐがなりたったとき、3回なげた時点で

座標が1である条件つき確率は

次ページ表より

$\frac{\frac{24}{2187}}{\frac{32}{2187}}=\boxed{\frac{3}{4}}$ ニヌ



$y_3=1$

解答記号	正解	配点
ア	1	1
イ	3	1
ウ	2	1
エオ	38	3
カキ	14	3
クケ	23	2
コ	3	1
サシスセソ	28729	2
タチツテトナ	322187	3
ニヌ	34	3

20点

4

(1) $\begin{cases} 7x+13y+17z=8 & \text{— ①} \\ 35x+39y+34z=37 & \text{— ②} \end{cases}$

$$\begin{array}{lrl} ①\times 5 \rightarrow & 35x+65y+85z=40 & \\ ② \rightarrow & 35x+39y+34z=37 & \\ \hline ①\times5-②\text{より} & \underbrace{\boxed{26}}_{\text{アイ}}y+\underbrace{\boxed{51}}_{\text{ウエ}}z=3 & \text{— ③} \end{array}$$

$a=51$, $b=26$ とすると

$$\begin{array}{rl} a \qquad =51 & \text{— ㋐} \\ b=26 & \text{— ㋑} \\ \hline \end{array}$$

㋐−㋑ より $a-b=25$ — ㋒

㋑−㋒ より $-a+2b=1$

よって $26\times2+51\times(-1)=1$ より

両辺3倍して $26\times6+51\times(-3)=3$ — ㋓

よって ③−㋓ $26(y-6)+51(z+3)=0$ より

$26(y-6)=51(-z-3)$

26と51は互いに素より

$\begin{cases} y-6=51l \\ -z-3=26l \end{cases}$ (lは整数)とできる

ゆえに $y=6+51l$, $z=-3-26l$ となるので

yが正で最小のものは $y=\underbrace{\boxed{6}}_{\text{オ}}$, $z=\underbrace{\boxed{-3}}_{\text{カキ}}$

また $l=-k$ とすると

$y=6-\underbrace{\boxed{51}}_{\text{クケ}}k$, $z=-3+\underbrace{\boxed{26}}_{\text{コサ}}k$ となる

これを①に代入して $7x+13(6-51k)+17(-3+26k)=8$ より

$7x+78-13\times51k-51+17\times26k=8$

$7x=-19+13\times51k-17\times26k$

$7x=-19+13k(51-17\times2)$

$7x=-19+13\times17k$

$7x=221k-19$

$7x=7(31k-3)+4k+2$

よって $x=31k-3+\dfrac{\overset{\text{シ}}{\boxed{4}}k+2}{7}$ であるので

$4k+2\equiv0 \pmod 7$ より $4k\equiv-2\equiv5 \pmod 7$

$\left(\begin{array}{l} k\equiv0,1,2,3,4,5,6 \pmod 7 \\ \text{のとき } 4k\equiv0,4,1,5,2,6,3 \pmod 7 \end{array}\right)$

$k\equiv\underbrace{\boxed{3}}_{\text{ス}} \pmod 7$ で $4k\equiv12\equiv5 \pmod 7$ をみたす

(2) $\begin{cases} 2x+5y+7z=a & —④ \\ 3x+25y+21z=-1 & —⑤ \end{cases}$

⑤-④から　$x+20y+14z=-1-a$ より

$$x=-20y-14z-1-a \quad —⑥$$

また　⑤×2 → $6x+50y+42z=-2$
　　　④×3 → $6x+15y+21z=3a$

⑤×2－④×3　　$35y+21z=-2-3a \quad —⑦$

$$7(5y+3z)=-2-3a$$

この左辺は7の倍数より　$-2-3a$ も7の倍数

よって　$-2-3a\equiv 0 \pmod 7$ より

$$3a\equiv -2\equiv 5 \pmod 7$$

$a\equiv 0,1,2,3,4,5\ 6 \pmod 7$ に対して

$3a\equiv 0,3,6,2,5,1,4 \pmod 7$

ゆえに　a を $\boxed{7}$ で割った余りが $\boxed{4}$ のとき　整数 y,z が存在する
　セ　ソ

(3) $\begin{cases} x+2y+bz=1 & —⑧ \\ 5x+6y+3z=5+b & —⑨ \end{cases}$　のとき

⑨－⑧×5 から　$-4y+(3-5b)z=b \quad —⑩$

ここで　$b\equiv 0,1,2,3 \pmod 4$ に対して

$3-5b\equiv 3-0\equiv 3,\ 3-5\equiv -2\equiv 2,\ 3-10\equiv -7\equiv 1,\ 3-15\equiv -12\equiv 0 \pmod 4$

$b\equiv 1,3$ のとき　⑩の右辺は奇数．左辺は偶数となって不適
$\pmod 4$

ゆえに　$b\equiv \boxed{0},\boxed{2} \pmod 4$ のとき，整数 y,z が存在する
　タ　チ

(4) $\begin{cases} x+3y+5z=1 & —⑪ \\ cx+3(c+5)y+10z=3 & —⑫ \end{cases}$

⑪×c → $cx+3cy+5cz=c \quad —⑬$

⑫－⑬より　$15y+(10-5c)z=3-c$

$$5\{3y+(2-c)z\}=3-c \quad —⑭$$

ここで左辺は5の倍数より　$3-c$ も5の倍数より

$3-c=5m$　(m は整数)　とおける

このとき　$c=-5m+3$ より

⑭は $5\{3y+(2-(-5m+3))z\}=5m$ より

$3y+(5m-1)z=m$

また $m\equiv 0,1,2 \pmod 3$ に対して

$5m-1\equiv -1\equiv 2,\ 4\equiv 1,\ 9\equiv 0 \pmod 3$ であり.

$m\equiv 2 \pmod 3$ のときは 左辺は 3の倍数になるが
右辺は 3の倍数ではないので不適

よって $m\equiv 0,1 \pmod 3$ より $m=3l,\ 3l+1$ (lは整数) だから

$m=3l$ のとき $c=-5\times 3l+3$
$=-15l+3$

$m=3l+1$ のとき $c=-5(3l+1)+3$
$=-15l-2$
$=-15(l-1)+13$ となる

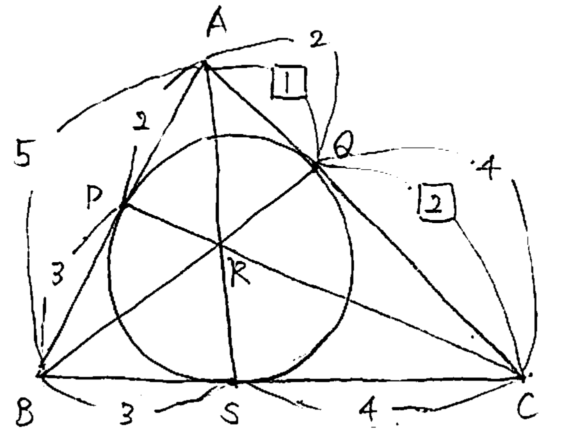
以上のことから

cは $\underset{ツテ}{\boxed{15}}$ でわったときの余りが $\underset{ト}{\boxed{3}}$ または $\underset{ナニ}{\boxed{13}}$ となる

解答記号	正解	配点
アイウエ	2651	2
オカキ	6-3	2
クケコサ	5126	2
シ	4	2
ス	3	2
セソ	74	3
タチ	02	3
ツテトナニ	15313	4

20点

5



(1) チェバの定理より

$\dfrac{AP}{PB}\times\dfrac{BS}{SC}\times\dfrac{CQ}{QA}=1$ だから

$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{BS}{SC}\times\dfrac{2}{1}=1$ より

$\dfrac{BS}{SC}=\dfrac{3}{4}$

よって $BS:SC=\boxed{3}:\boxed{4}$ ア イ.

$AP=AQ=\boxed{2}$ ウ, また $PB+QC=BC$ より $BC=3+4=\boxed{7}$ エ

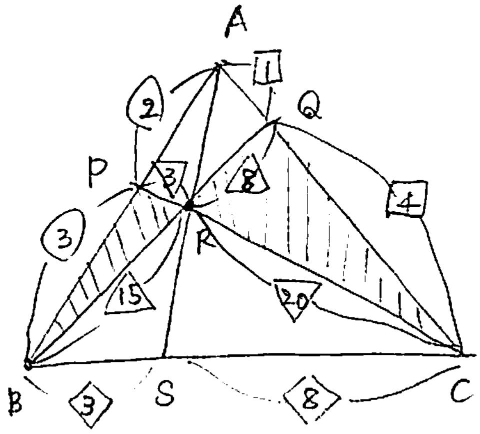
また $BS:SC=3:4$ より

$BS=3$, $SC=4$ であるから

$BS=BP=3$, $SC=QC=4$ となっているので

点Sは $\boxed{\triangle ABC \text{ の内接円と } BC \text{ の接点}}$ となっている

$\boxed{オ}$ は ②



(2) (i) メネラウスの定理より

$\dfrac{AC}{CQ}\times\dfrac{QR}{RB}\times\dfrac{BP}{PA}=1$ だから

$\dfrac{5}{4}\times\dfrac{QR}{RB}\times\dfrac{3}{2}=1$

よって $\dfrac{QR}{RB}=\dfrac{8}{15}$ より

$BR:RQ=\boxed{15}:\boxed{8}$ カキ ク

また $\dfrac{AB}{BP}\times\dfrac{PR}{RC}\times\dfrac{CQ}{QA}=1$ より $\dfrac{5}{3}\times\dfrac{PR}{RC}\times\dfrac{4}{1}=1$

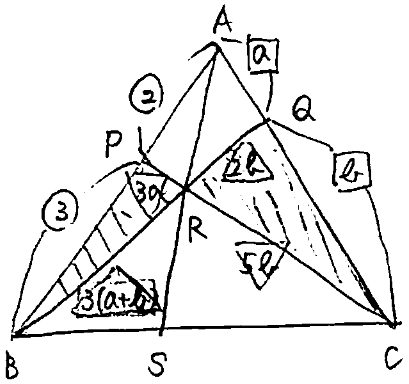
よって $\dfrac{PR}{RC}=\dfrac{3}{20}$ より

$CR:RP=\boxed{20}:\boxed{3}$ ケコ サ

ゆえに $\dfrac{\triangle CQR\text{の面積}}{\triangle BPR\text{の面積}}=\dfrac{CR\times QR}{PR\times BR}=\dfrac{\cancel{20}^{\,4}}{3}\times\dfrac{8}{\cancel{15}_{\,3}}=\boxed{\dfrac{32}{9}}$ シス セ

（別解）チェバの定理より $\dfrac{AP}{PB}\times\dfrac{BS}{SC}\times\dfrac{CQ}{QA}=1$ だから $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{BS}{SC}\times\dfrac{4}{1}=1$ より $\dfrac{BS}{SC}=\dfrac{3}{8}$

ゆえに $\dfrac{\triangle CQR\text{の面積}}{\triangle BPR\text{の面積}}=\dfrac{\frac{CS}{BC}\times\frac{QC}{AC}}{\frac{BS}{BC}\times\frac{PB}{AB}}=\dfrac{\frac{8}{11}\times\frac{4}{5}}{\frac{3}{11}\times\frac{3}{5}}=\boxed{\dfrac{32}{9}}$ ）



(ii) AQ：QC ＝ $a:b$ とすると

メネラウスの定理より

$$\frac{AC}{CQ}\times\frac{QR}{RB}\times\frac{BP}{PA}=1 \text{ より}$$

$$\frac{a+b}{b}\times\frac{QR}{RB}\times\frac{3}{2}=1$$

よって $\dfrac{QR}{RB}=\dfrac{2b}{3(a+b)}$ より

$QR:RB=2b:3(a+b)$

また $\dfrac{AB}{BP}\times\dfrac{PR}{RC}\times\dfrac{CQ}{QA}=1$ より

$\dfrac{5}{3}\times\dfrac{PR}{RC}\times\dfrac{b}{a}=1$　よって $\dfrac{PR}{RC}=\dfrac{3a}{5b}$ より　$PR:RC=3a:5b$

ゆえに $\dfrac{\triangle CQR\text{の面積}}{\triangle BPR\text{の面積}}=\dfrac{1}{4}$ より　$\dfrac{CR\cdot RQ}{RP\cdot RB}=\dfrac{1}{4}$ だから

$$\frac{5b\times 2b}{3a\times 3(a+b)}=\frac{1}{4} \text{ より}$$

$9a(a+b)=40b^2$ ―①　　$\begin{matrix}3 & & -5\\ & \times & \\ 3 & & 8\end{matrix}$

$9a^2+9ab-40b^2=0$

$(3a-5b)(3a+8b)=0$

a,bはともに正より $3a+8b=0$ は不適

よって $3a-5b=0$ より

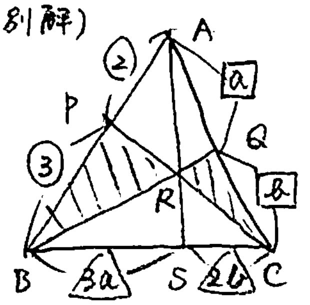
$3a=5b$　ゆえに $\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{3}$

以上のことから Qは ACを $\underset{ソ}{\boxed{5}}:\underset{タ}{\boxed{3}}$ に内分する

解答記号	正解	配点
アイ	34	2
ウ	2	2
エ	7	3
オ	2	3
カキク	158	2
ケコサ	203	2
シスセ	329	3
ソタ	53	3

20点

(別解)



チェバの定理より $\dfrac{AP}{PB}\times\dfrac{BS}{SC}\times\dfrac{CQ}{QA}=1$ だから

$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{BS}{SC}\times\dfrac{b}{a}=1$　よって $\dfrac{BS}{SC}=\dfrac{3a}{2b}$ より

$BS:SC=3a:2b$

$$\text{ゆえに}\ \frac{\triangle CQR\text{の面積}}{\triangle BPR\text{の面積}}=\frac{\frac{SC}{BC}\times\frac{CQ}{AC}}{\frac{BS}{BC}\times\frac{PB}{AB}}=\frac{\frac{2b}{3a+2b}\times\frac{b}{a+b}}{\frac{3a}{3a+2b}\times\frac{3}{5}}=\frac{1}{4} \text{ より}$$

$$\frac{\frac{2b^2}{a+b}}{\frac{9a}{5}}=\frac{1}{4}\quad\text{よって}\ \frac{10b^2}{9a(a+b)}=\frac{1}{4}\ \text{より}$$

$9a(a+b)=40b^2$ で

上の①式と同じ