1　$|3x-3c+1| = (3-\sqrt{3})x-1$ — ①　において

(1)　$x \geqq c-\frac{1}{3}$ のとき

$3x-3c+1 = (3-\sqrt{3})x-1$ より — ②

$\sqrt{3}x = 3c-2$

よって $x = \underset{ア}{\boxed{\sqrt{3}}}c - \frac{\overset{イ}{\boxed{2}}\sqrt{3}}{3}$ — ③　となる

③が $x \geqq c-\frac{1}{3}$ をみたすような c の範囲は

$\sqrt{3}c - \frac{2\sqrt{3}}{3} \geqq c - \frac{1}{3}$ をといて

$(\sqrt{3}-1)c \geqq \frac{2\sqrt{3}-1}{3}$ より

$c \geqq \frac{2\sqrt{3}-1}{3(\sqrt{3}-1)} = \frac{(2\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{3\times 2} = \frac{6-1+2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6}$

よって $\boxed{c \geqq \frac{5+\sqrt{3}}{6}}$ である

$\boxed{ウ}$ は②

また $x < c-\frac{1}{3}$ のとき ①は

$-3x+3c-1 = (3-\sqrt{3})x-1$ より — ④

$(6-\sqrt{3})x = 3c$

よって $x = \frac{3c}{6-\sqrt{3}} = \frac{3c(6+\sqrt{3})}{36-3} = \frac{\overset{エ}{\boxed{6}}+\sqrt{3}}{\underset{オカ}{\boxed{11}}}c$ — ⑤　となる

⑤が $x < c-\frac{1}{3}$ をみたすような c の範囲は

$\frac{6+\sqrt{3}}{11}c < c - \frac{1}{3}$ より

$\frac{-5+\sqrt{3}}{11}c < -\frac{1}{3}$

よって　$c > \frac{11}{-5+\sqrt{3}} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3(5-\sqrt{3})} = \frac{11(5+\sqrt{3})}{3(25-3)} = \frac{5+\sqrt{3}}{6}$

よって $\boxed{c > \frac{5+\sqrt{3}}{6}}$ となる

$\boxed{キ}$ は⑤

(2) よって $\boxed{c > \frac{5+\sqrt{3}}{6}}$ のとき ①は 異なる2つの実数解をもち

$\boxed{ク}$ は ①

$\boxed{c = \frac{5+\sqrt{3}}{6}}$ のとき ①はただ1つの解をもち

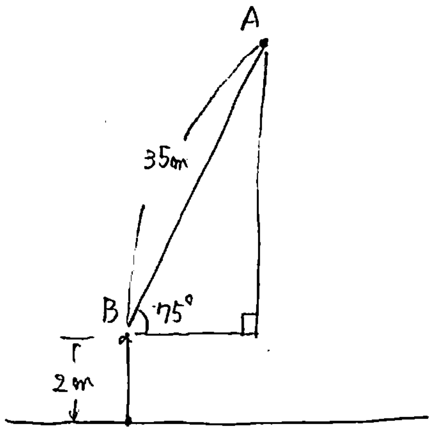
$\boxed{ケ}$ は ④

$\boxed{c < \frac{5+\sqrt{3}}{6}}$ のとき ①は 実数解をもたない.

$\boxed{コ}$ は ⑦

解答記号	正解	配点
アイ	32	2
ウ	2	2
エオカ	611	2
キ	5	2
クケコ	147	2
		10点

(1)



Aの高さは $2+35\sin 75^\circ$

$= 2+35\times 0.9659$

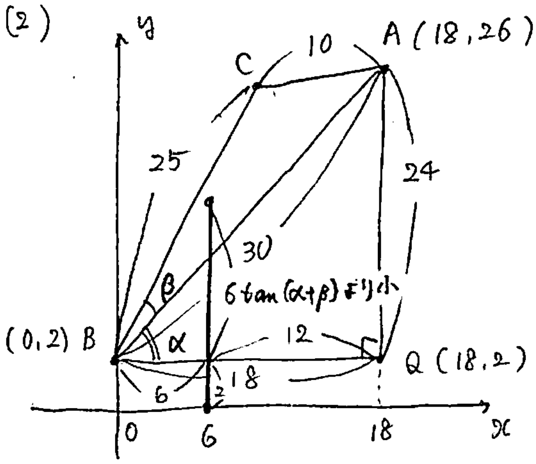
$= 2+33.8065$

$= 35.8065$

$$\begin{array}{r} 0.9659 \\ \times \quad 35 \\ \hline 48295 \\ 28977 \\ \hline 33.8065 \end{array}$$

よって 約 $\boxed{36}$ m（サシ）

(2)



$AB = \sqrt{18^2+24^2}$

$= \sqrt{(6\times 3)^2+(6\times 4)^2}$

$= 6\sqrt{9+16} = 6\times 5 = 30$

よって ∠ABQ = α, ∠ABC = β とすると

$\sin\alpha = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} = 0.8$ だから

$\alpha \fallingdotseq 53^\circ$

また余弦定理より

$\cos\beta = \frac{25^2+30^2-10^2}{2\times 25\times 30}$

$= \frac{\cancel{5^2}(5^2+6^2-2^2)}{2\times\cancel{5^2}\times 5\times 6}$

$= \frac{25+36-4}{60} = \frac{57}{60} = \frac{19}{20} = \frac{9.5}{10}$

$= 0.95$

よって $\beta \fallingdotseq 18^\circ$

以上のことから $\angle QBC \fallingdotseq \alpha+\beta = 53^\circ+18^\circ = \boxed{71^\circ}$

$\boxed{ス}$ ⑤

解答記号	正解	配点
サシ	36	2
ス	5	2
セ	4	2
		6点

(3) フェンスの高さは　$2+6\tan 71^\circ$ より小さければよい.

$2+6\tan 71^\circ$

$= 2+6\times 2.9042$

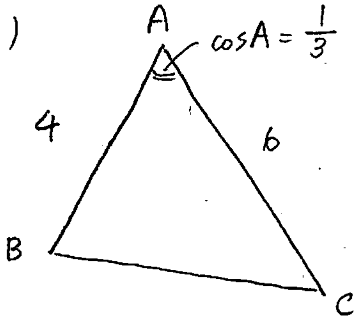
$= 2+17.4252$

$= 19.4252$

$$\begin{array}{r} 2.9042 \\ \times \quad 6 \\ \hline 17.4252 \end{array}$$

よって $\boxed{セ}$ は ④の 19m であればはしごは当たらない

(1)



余弦定理より

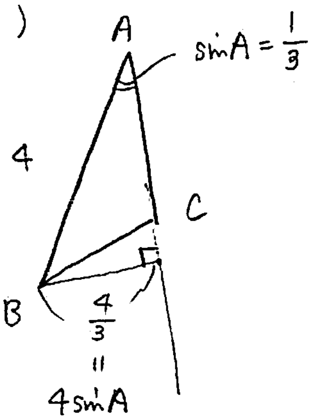
$BC^2=4^2+6^2-2\times4\times6\times\cos A$

$=16+36-2\times4\times6\times\frac{1}{3}$

$=52-16=36$

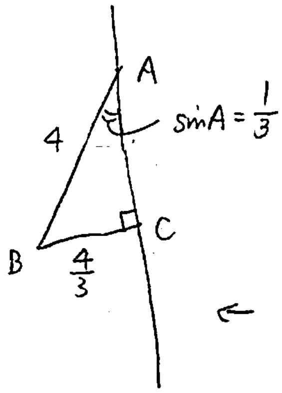
よって $BC=\boxed{6}$ ソ

(2)



左図より $BC \geqq 4\sin A$ だから

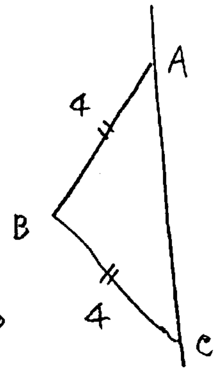
$BC \geqq \boxed{\frac{4}{3}}$ タチ

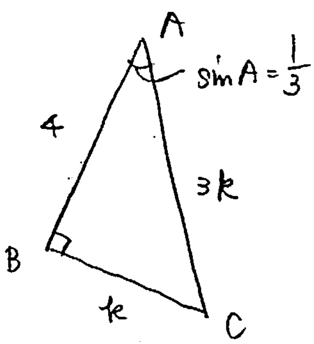


$BC=\frac{4}{3}$ または

$BC=\boxed{4}$ ツ

← のとき，△ABCは ただ1通りにきまる →





また $\angle ABC=90^\circ$ のとき

$AC=3k,\ BC=k$ とおけるから $(k>0)$

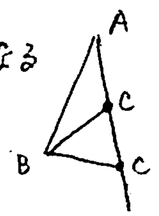
三平方の定理より

$4^2+k^2=(3k)^2$ から

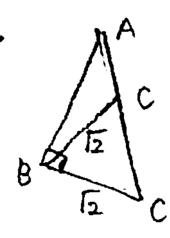
$\therefore\ 8k^2=16$

$k^2=2$． よって $BC=k=\sqrt{\boxed{2}}$ となる テ

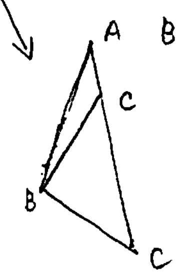
よって $\frac{4}{3}<BC<\sqrt{2}$ のとき 2通りで鋭角三角形と鈍角三角形 $\boxed{ト}$ は⑤ →



$BC=\sqrt{2}$ のとき 2通りで直角三角形と鈍角三角形 $\boxed{ナ}$ は⑦ →

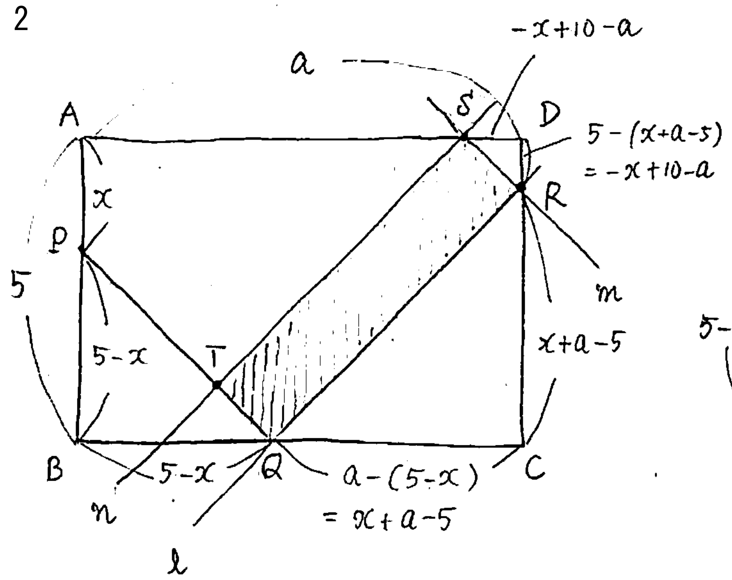


$BC>\sqrt{2}$ かつ $BC\neq4$ のとき 2通りでともに鈍角三角形 $\boxed{ニ}$ は⑧

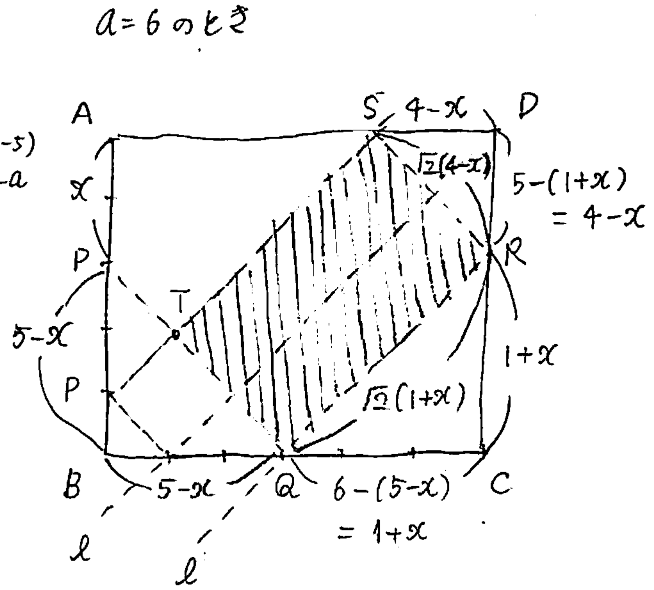


解答記号	正解	配点
ソ	6	2
タチ	43	2
ツ	4	2
テ	2	2
ト	5	2
ナ	7	2
ニ	8	2
		14点

2



$a=6$ のとき



$a=6$ のとき l が C、D 以外の辺 CD で交わるとき

DR >0 より $0 \leqq \mathrm{AP} < \boxed{4}$ である
ア

このとき $\mathrm{AP}=x$ とすると

$\mathrm{BP}=\mathrm{BQ}=5-x$

$\mathrm{QC}=\mathrm{RC}=6-(5-x)=1+x$

$\mathrm{RD}=\mathrm{SD}=5-(1+x)=4-x$

よって QRST の面積を S とすると

$$S=\mathrm{QR}\times\mathrm{SR}=\sqrt{2}(1+x)\cdot\sqrt{2}(4-x)$$
$$=2(-x^2+3x+4)$$
$$=2\left\{-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\right\}$$
$$=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$$

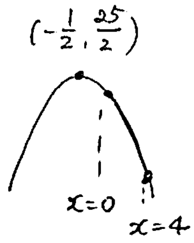
よって $0 \leqq x < 4$ より 最大値は $\boxed{\dfrac{25}{2}}$ イウ エ

また 左上図より

$$S=\sqrt{2}(x+a-5)\times\sqrt{2}(-x+10-a)$$
$$=-2(x+a-5)(x+a-10)$$ であり

$a=8$ のとき

$$S=-2(x+3)(x-2)$$
$$=-2(x^2+x-6)$$
$$=-2\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right\}$$



であり、$x=0$ で最大値をとり

その値は $-2\times3\times(-2)=\boxed{12}$ となる
オカ

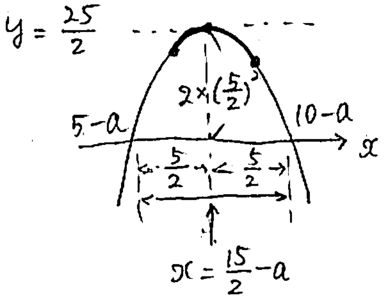
(2)　$5<a<10$ のとき

DR $= -x+10-a>0$ より

$0 \leqq x < \underbrace{\boxed{10}}_{キク} - a$ —①

また $S=-2(x+a-5)(x+a-10)$ は

$x=\dfrac{(5-a)+(10-a)}{2}=\dfrac{15}{2}-a$ で $2\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}$ をとる



よって①より　$0\leqq \dfrac{15}{2}-a<10-a$ であればよいから

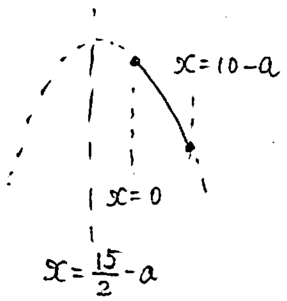
$5<a\leqq \boxed{\dfrac{15}{2}}$ ケコ/サ　であればよい

また $\dfrac{15}{2}-a<0$ のとき、つまり $\dfrac{15}{2}<a<10$ のとき

$x=0$ で S は最大値をとり

$S=-2(a-5)(a-10)$

$=\underbrace{\boxed{-2}}_{シス}a^2+\underbrace{\boxed{30}}_{セソ}a-\underbrace{\boxed{100}}_{タチツ}$　となる



解答記号	正解	配点
ア	4	2
イウエ	252	2
オカ	12	2
キク	10	2
ケコサ	152	4
シスセソタチツ	−230100	3

15点

(1) 交通量については $\dfrac{(標準偏差)}{(平均値)} = \dfrac{10200}{17300} = \dfrac{102}{173} \doteqdot 0.589\cdots$

速度については $\dfrac{(標準偏差)}{(平均値)} = \dfrac{9.60}{82.0} \doteqdot 0.117\cdots$

よって $\boxed{テ}$ は ⑥ 0.12

交通量と速度の相関係数は

$$\frac{-636\cancel{00}}{102\cancel{00}\times 9.60} = -\frac{\cancel{636}}{\cancel{102}\times \cancel{9.6}} = -\frac{53}{81.6} \doteqdot -0.649\cdots$$

318　106　53
51　4.8
17

よって $\boxed{ト}$ は ① −0.65

表1　2015年の交通量と速度の平均値，標準偏差および共分散

	平均値	標準偏差	共分散
交通量	17300	10200	−63600
速　度	82.0	9.60	

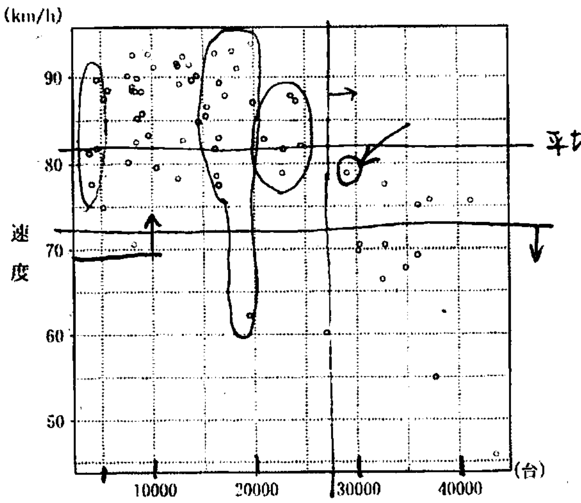
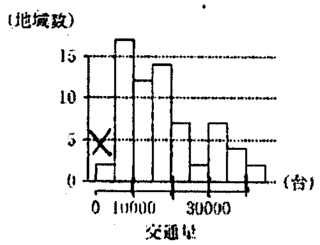


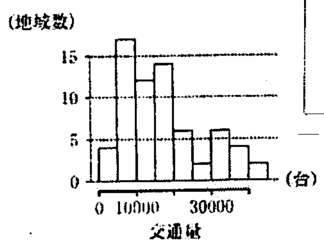
図1　2015年の交通量と速度の散布図
(出典：国土交通省のWebページにより作成)

ヒストグラムについては
5000以下が4つあるので⓪は不適
20000以上25000未満が6つあるので②は不適
15000以上20000未満が14あるので
①が正しい。
よって $\boxed{ナ}$ は①

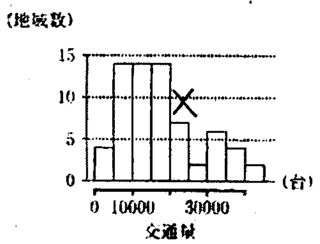
⓪



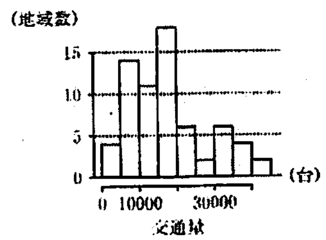
①



②



③



$\boxed{ニ}$，$\boxed{ヌ}$ の解答群(解答の順序は問わない。)

- ⓪ 交通量が27500以上のすべての地域の速度は75未満である。×
- ① 交通量が10000未満のすべての地域の速度は70以上である。○
- ② 速度が平均値以上のすべての地域では，交通量が平均値以上である。×
- ③ 速度が平均値未満のすべての地域では，交通量が平均値未満である。×
- ④ 交通量が27500以上の地域は，ちょうど7地域存在する。×
- ⑤ 速度が72.5未満の地域は，ちょうど11地域存在する。○

ニヌについては散布図から
正しいのは $\boxed{①，⑤}$
　　　　　　ニ　ヌ

0.589
173) 1020
865
1550
1384
1660

0.117
82) 9.6
82
140
82
580
574
6

17
× 4.8
136
68
816

0.649
81.6) 530
4896
4040
3264
7760
7344

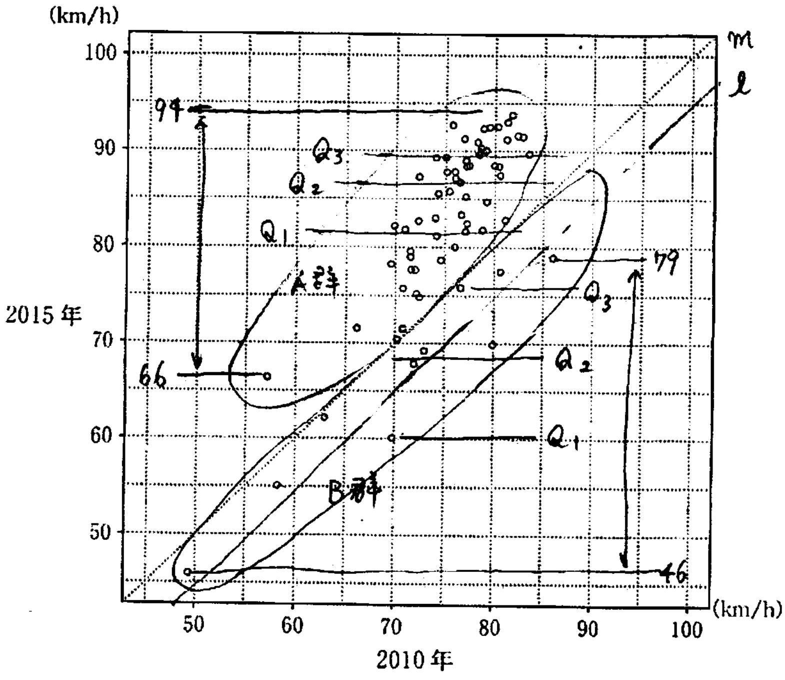


図 2　2010 年と 2015 年の速度の散布図

(出典：国土交通省の Web ページにより作成)

B群が10地点なので

A群は $67-10=\boxed{57}$ (地点)
ネノ

B群において5km以上遅くなった地域数は直線 l より下のところだから $\boxed{3}$ 地点
ハ

この3地点は

86 → 79

80 → 70

70 → 60 なので

10%以上遅くなったのは $\boxed{2}$ 地点
ヒ

(I) A 群の速度の範囲は，B 群の速度の範囲より小さい。

(II) A 群の速度の第 1 四分位数は，B 群の速度の第 3 四分位数より小さい。

(III) A 群の速度の四分位範囲は，B 群の速度の四分位範囲より小さい。

(I), (II), (III) の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{フ}$ である。

$\boxed{フ}$ の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(I)	正	正	正	正	誤	誤	誤	誤
(II)	正	正	誤	誤	正	正	誤	誤
(III)	正	誤	正	誤	正	誤	正	誤

Aの範囲は $94-66=28$

Bの範囲は $79-46=33$ よって正しい

Aの $Q_1=81.2$

Bの $Q_3=76$ より正しくない

Aの四分位範囲 $Q_3-Q_1=89.7-81.2$
$=8.5$

Bの四分位範囲 $Q_3-Q_1=76-60$
$=16$

よって正しい

ゆえに $\boxed{フ}$ は②となる

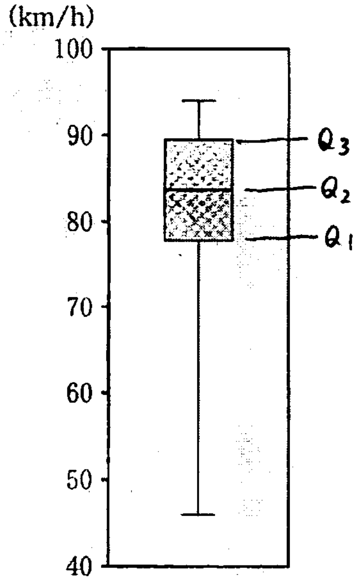


図 3　2015 年の速度の箱ひげ図

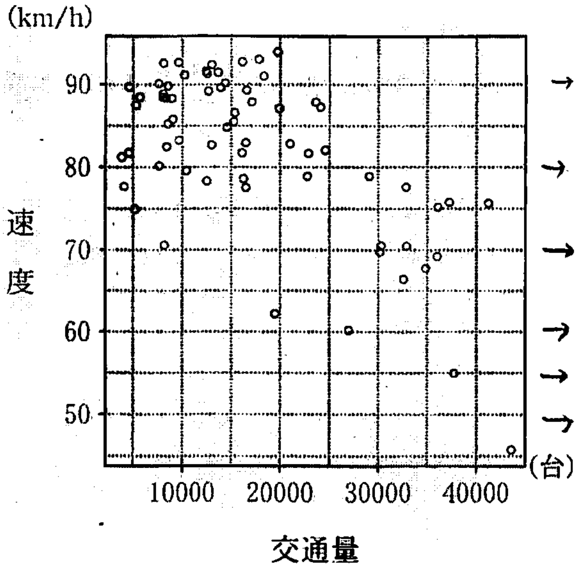


図 4　2015 年の交通量と速度の散布図

$\to \frac{60}{90} = 0.666 \leftarrow Q_3$

$\leftarrow Q_2$

$\to \frac{60}{80} = 0.750 \leftarrow Q_1$

$\to \frac{60}{70} = 0.857$

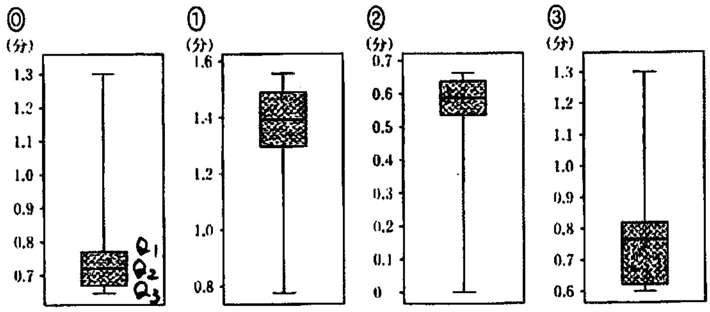
→ 1.00分

→ 1.09分

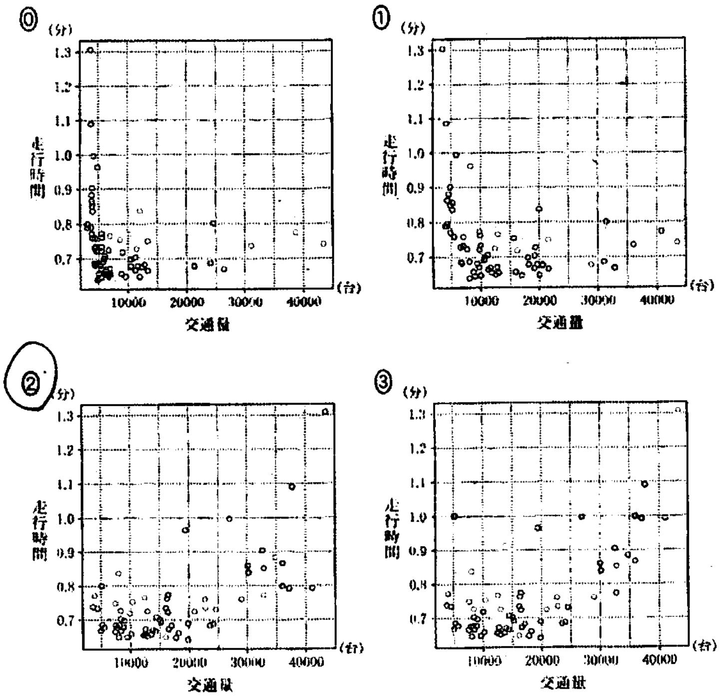
$\to \frac{60}{50} = 1.20$分

(出典：国土交通省の Web ページにより作成)

$\boxed{へ}$ の解答群



$\boxed{ホ}$ の解答群



右上の図から Q_1, Q_2 は 0.6〜0.75

Q_3 は 0.75〜0.85

これに見合うのは左の $\boxed{⓪}$ へ

また上の散布図の上下反転したものが $\boxed{ホ}$ なので $\boxed{ホ}$ は②

解答記号	正解	配点
テ	6	1
ト	1	2
ナ	1	1
ニヌ	15 or 51	2
ネノ	57	2
ハ	3	1
ヒ	2	2
フ	2	2
ヘホ	02	2
		15点

3

(1) 2回さいころを投げて、出た目の合計を6でわった余りが4になるのは

出た目の合計が $\boxed{4}$ または $\boxed{10}$ の場合である

ア イウ

A=4 となるのは 2回の目が (1,3),(2,2),(3,1),(6,4),(5,5),(4,6)

の6通りだから、その確率は $\frac{6}{36}=\boxed{\frac{1}{6}}$ エ オ

A=5 となるのは、2回の合計が 5,11 のときだから

(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,6),(6,5) より 6通り

A≧6 となる場合はない

よって A≧4 となる確率は $\frac{12}{36}=\boxed{\frac{1}{3}}$ カ キ である

(2) 1回目に出る目が5のとき、2回目 1,2,3,4,5,6 の目のそれぞれで

A=0,1,2,3,4,5 となるから

2回目を投げると A≧4 となるのは $\frac{2}{6}=\boxed{\frac{1}{3}}$ ク ケ である

1回目に投げたサイコロがいずれの場合も、2回目を投げると

Aの値は 0,1,2,3,4,5 の 6通りとなるので

2回目を投げると A≧4 となるのは $\frac{1}{3}$ である

以上のことから A≧4 になる確率は

1回目に投げたさいころの目を6でわった余りが

(i) 2以下のときのみ 2回目を投げるなら

1回目 6,1,2 で 2回目をなげ

1回目 4,5 で 1回目のみで A≧4 だから

A≧4の確率は $\frac{3}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=\frac{3}{18}+\frac{6}{18}=\frac{9}{18}$

(ii) 3以下のときのみ、2回目を投げるなら

1回目 6,1,2,3 で 2回目をなげ

1回目 4,5 で 1回目のみで A≧4 だから

A≧4の確率は $\frac{4}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=\frac{4}{18}+\frac{6}{18}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$

(iii) 4以下のときのみ、2回目投げるなら

1回目、6,1,2,3,4 で 2回目をなげ

1回目 5 で 1回目のみで A≧4 だから

A≧4の確率は $\frac{5}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{18}+\frac{3}{18}=\frac{8}{18}$

よって 1回目の6でわった余りが $\boxed{3以下}$ で 2回目を投げればよく、そのとき確率は $\boxed{\frac{5}{9}}$ サ シ

コ ①

(3) (i) 1回目3がでたとき、2回目を投げない場合 得点なしとなるのは
その後3〜6がでるときだから $\frac{4}{6}=\boxed{\frac{2}{3}}$ スセ $\left(=\frac{12}{18}\right)$

2回目を投げる場合 2回目が1,2,3,4,5,6に対して
Aの値はそれぞれ順に 4,5,0,1,2,3 であるから
得点なしとなる確率は $\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{6}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{6}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}$
$=\frac{3+2+6+6+5+4}{36}=\frac{26}{36}=\boxed{\frac{13}{18}}$ ソタ チツ である

よって 1回目に投げたさいころの目が3であったときは
$\boxed{テ}$ ⓪ 2回目を投げない方が得点なしとなる確率は小さい

(ii) 1回目1がでたとき、2回目を投げない場合、得点なしとなるのは
その後1〜6がでるときだから 確率1
よって2回目投げる方が得点なしにならない確率が小さい

(iii) 1回目2がでたとき、2回目を投げない場合 得点なしとなるのは
その後2〜6がでるときだから 確率 $\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$

2回目を投げる場合 2回目の目に対して Aの値が0〜5となるのが1つずつあり
得点なしとなる確率は (i)と同じで $\frac{13}{18}$

同様に考えて表にすると以下のようになる

1回目にでる目	1	2	3	4	5	6
2回目なげない場合の得点なしの確率	$\frac{18}{18}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{12}{18}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{18}{18}$
2回目なげる場合の得点なしの確率	$\frac{13}{18}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{13}{18}$
2回目投げなかったときのAの値	1	2	3	4	5	0

解答記号	正解	配点
ア	4	1
イウ	10	1
エオ	16	2
カキ	13	2
クケ	13	2
コ	1	2
サシ	59	2
スセ	23	1
ソタチツ	1318	2
テ	0	1
ト	0	2
ナニヌネ	1118	2

20点

よって 1回目になげたさいころの目を6でわった余りが $\boxed{2以下}$ のときのみ
ト ⓪

2回目を投げれば得点なしとなる確率が最小となり
その確率は $\frac{1}{6}\left(\frac{13}{18}+\frac{13}{18}+\frac{12}{18}+\frac{9}{18}+\frac{6}{18}+\frac{13}{18}\right)$
$=\frac{1}{6}\times\frac{66}{18}=\boxed{\frac{11}{18}}$ ナニ ヌネ となる

4

(1) $77k = 5\times 15k + 2k$ より

77を5でわった余りと $2k$ を5でわった余りは等しいから

$k = 0, 1, 2, 3, 4$ に対してそれぞれ

$2k = 0, 2, 4, 6, 8$ となるので $k = \boxed{3}$ ア が解

(2) $\dfrac{k}{5} + \dfrac{l}{7} + \dfrac{m}{11} - \dfrac{1}{385}$ —① が整数のとき

$\dfrac{k}{5} + \dfrac{l}{7} + \dfrac{m}{11} = \dfrac{1}{385} + n$ —② より

両辺に385をかけて

$77k + 55l + 35m = 1 + 385n$ —③ となる

これより $77k = 5\times(-11l - 7m + 77n) + 1$ となることから

$77k$ を5でわった余りは1なので $k = 3$ である

同様にして $55l = 7(-11k - 5m + 55n) + 1$ より

$55l$ を7でわった余りは1であり

$55l = 7\times 7l + 6l$ より

$55l$ を7でわった余りと $6l$ を7でわった余りは等しい

$l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ に対して

$6l = 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36$ なので7でわった余りが1より

$l = \boxed{6}$ イ

また $35m = 11(-7k - 5l + 35n) + 1$ より

$35m$ を11でわった余りは1であり

$35m = 11\times 3m + 2m$ より

$35m$ を11でわった余りと $2m$ を11でわった余りは等しい

$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ に対して

$2m = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22$ であり

11でわった余りが1より $m = \boxed{6}$ ウ

このとき $(k, l, m) = (3, 6, 6)$ を③に代入すると $n = 2$ となる

(3) x, y, z は整数で $0 \leqq x < 5$, $0 \leqq y < 7$, $0 \leqq z < 11$ のとき

$77 \times 3x + 55 \times 6y + 35 \times 6z$ を 5 でわった余りが 2 より

5を法とすると $77 \times 3x + 55 \times 6y + 35 \times 6z$

$\equiv 2 \times 3x + 0 + 0$

$\equiv 6x \equiv 1 \times x \equiv x \equiv 2 \pmod 5$ だから

$x = \boxed{2}$ エ

また 7を法とすると $77 \times 3x + 55 \times 6y + 35 \times 6z$

$\equiv 0 + 6 \cdot 6y + 0$

$\equiv y \equiv 4 \pmod 7$ だから $y = \boxed{4}$ オ

11を法とすると $77 \times 3x + 55 \times 6y + 35 \times 6z$

$\equiv 0 + 0 + 2 \times 6z$

$\equiv z \equiv 5 \pmod{11}$ だから $z = \boxed{5}$ カ

よって $p = 77 \times 3x + 55 \times 6y + 35 \times 6z$ のとき

5, 7, 11 でわった余りがそれぞれ 2, 4, 5 である

整数 M は

$M = 5 \times 7 \times 11 r + p$ （r は整数）とできる

(4) $p = 77 \times 3x + 55 \times 6y + 35 \times 6z$ のとき.

$p \equiv 2 \pmod 5$ より

$p^a \equiv 2^a \pmod 5$. よってこれが 1 となる最小の自然数 a は

$a = 4$

また $p \equiv 4 \pmod 7$ より

$p^b \equiv 4^b \pmod 7$ よって. これが 1 となる最小の自然数 b は

$4^1 \equiv 4$, $4^2 \equiv 2$, $4^3 \equiv 1 \pmod 7$ より $b = \boxed{3}$ キ

また $p \equiv 5 \pmod{11}$ より

$p^c \equiv 5^c \pmod{11}$ よってこれが 1 となる最小の自然数 c は

$5^1 \equiv 5$, $5^2 \equiv 25 \equiv 3$, $5^3 \equiv 5^2 \times 5 \equiv 3 \times 5 \equiv 4$

$5^4 \equiv 5^3 \times 5 \equiv 4 \times 5 \equiv 20 \equiv 9$

$5^5 \equiv 5^4 \times 5 \equiv 9 \times 5 \equiv 45 \equiv 1 \pmod{11}$ より $c = \boxed{5}$ ク

よって　$p^8 \equiv (p^4)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 5$

$p^8 \equiv (p^3)^2 \cdot p^2 \equiv 1^2 \times 4^2 \equiv 16 \equiv 2 \pmod 7$

$p^8 \equiv p^5 \times p^3 \equiv 1 \times 5^3 \equiv 125 \equiv 4 \pmod{11}$ であり

ここで $p' = 77 \cdot 3x' + 55 \cdot 6y' + 35 \cdot 6z'$ の形の整数（$0 \leqq x' < 5$, $0 \leqq y' < 7$, $0 \leqq z' < 11$, x', y', z'は整数）

p' を考えると

$p' \equiv 2 \cdot 3x' \equiv 6x' \equiv x' \pmod 5$

$p' \equiv 6 \cdot 6y' \equiv 36y' \equiv y' \pmod 7$

$p' \equiv 2 \cdot 6z' \equiv 12z' \equiv z' \pmod{11}$　となるから

$(x', y', z') = (1, 2, 4)$ とできる

よって　5, 7, 11 で割った余りがそれぞれ 1, 2, 4 である整数 p^8 は

$p^8 = (77 \cdot 3 \cdot 1 + 55 \cdot 6 \cdot 2 + 35 \cdot 6 \cdot 4) + 385r'$

（r'は整数）と表すことができるので

$p^8 = (231 + 660 + 840) + 385r'$

$= 1731 + 385r'$　とできて

$= 385 \times 4 + 191 + 385r'$　より

$$\begin{array}{r} 4 \\ 385\,\overline{)1731} \\ \underline{1540} \\ 191 \end{array}$$

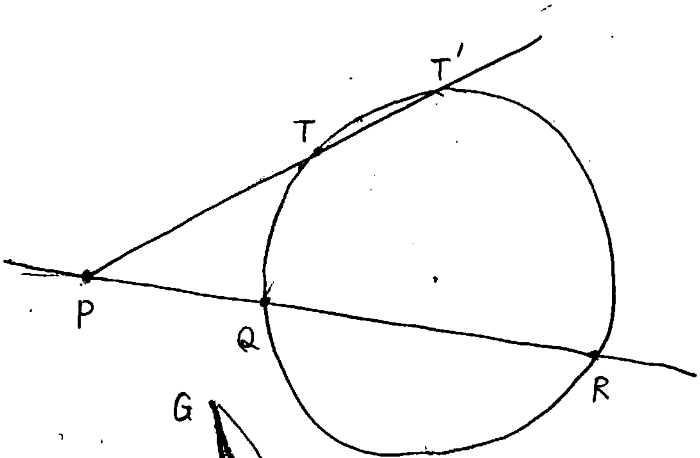
$p^8 \equiv \boxed{191} \pmod{385}$　となる

ケコサ

解答記号	正解	配点
ア	3	2
イ	6	2
ウ	6	2
エ	2	2
オカ	45	3
キ	3	2
ク	5	3
ケコサ	191	4

20点

5



(1) PTが Q, R, Tを通る円に接しないとすると

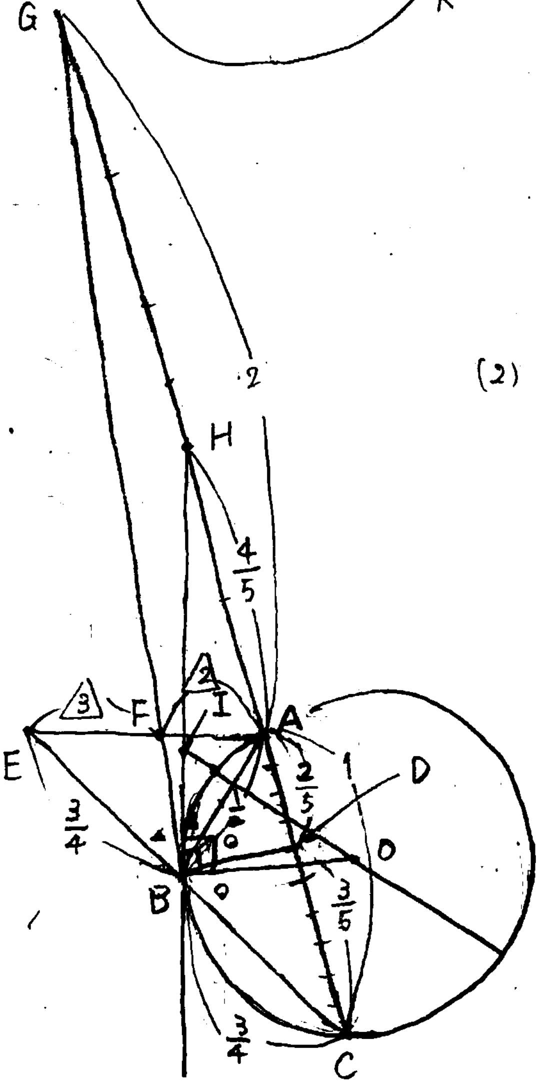
PTと円とのもうひとつの交点をT'とすると 方べきの定理より

$$PT \cdot PT' = \boxed{PQ} \cdot \boxed{PR} \quad \text{である}$$

ア⓪　イ①

TとT'は異なるので PT・PT'の値と PT^2 の値は異なる

したがって $PQ \cdot PR = PT^2$ に矛盾するので 直線PTは Q, R, Tを通る円に接する



(2) $AD : DC = AB : BC = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = 2 : 3$ より

$AD = \frac{2}{5}AC = \boxed{\frac{2}{5}}$ ウ エ

また $BC = BE = \frac{3}{4}$ であり

BFは∠ABEの内角二等分線より

$AF : FE = AB : BE : 2 : 3$

よってメネラウスの定理から

$\frac{CG}{GA} \times \frac{AF}{FE} \times \frac{EB}{BC} = 1$ だから

$\frac{CG}{GA} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1} = 1$　よって $\frac{CG}{GA} = \frac{2}{3}$ から

$\frac{AC}{AG} = \boxed{\frac{1}{2}}$ オ カ

また $\frac{CE}{EB} \times \frac{BF}{FG} \times \frac{GA}{AC} = 1$ より $\frac{2}{1} \times \frac{BF}{FG} \times \frac{2}{1} = 1$ だから $\frac{BF}{FG} = \frac{1}{4}$

ゆえに $\frac{\triangle ABF\text{の面積}}{\triangle AFG\text{の面積}} = \boxed{\frac{1}{4}}$ キ ク となる

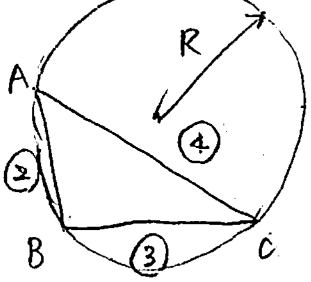
DGの中点をHとすると ∠DBH = 90° より Hは△DBGの外心であり

$HD = HG = HB = \boxed{\frac{6}{5}}$ ケ コ である

また $AH = DH - DA = \frac{6}{5} - \frac{2}{5} = \boxed{\frac{4}{5}}$ サ シ

$CH = AC + AH = 1 + \frac{4}{5} = \boxed{\frac{9}{5}}$ ス セ　である

△ABCの外心をOとすると



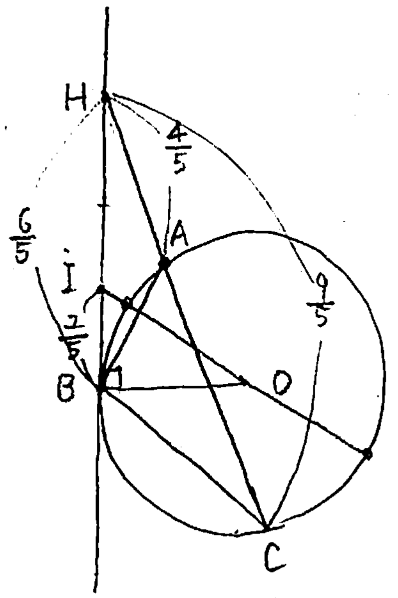
$\cos B = \dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\times2\times3} = \dfrac{-3}{12} = -\dfrac{1}{4}$ だから

$\sin B = \sqrt{1-\dfrac{1}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

よって△ABCの外接円の半径をRとすると

$2R = \dfrac{AC}{\sin B}$ より

$R = \dfrac{1}{2\times\frac{\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{2}{\sqrt{15}} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{15}}{15}}$ (ソタチ ツテ)



ここで $AH\cdot CH = \dfrac{4}{5}\times\dfrac{9}{5} = \dfrac{36}{25}$

$HB^2 = \left(\dfrac{6}{5}\right)^2 = \dfrac{36}{25}$

よって $AH\cdot CH = HB^2$ がなりたつので

BHは円に接する

ゆえに $\angle OBI = 90°$ となるから

$IO = \sqrt{BO^2+BI^2}$

$= \sqrt{R^2+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}$

$= \sqrt{\dfrac{4}{15}+\dfrac{4}{25}} = \sqrt{\dfrac{20+12}{75}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$

$= \boxed{\dfrac{4\sqrt{6}}{15}}$ (トナ ニヌ)

となる

解答記号	正解	配点
アイ	01 or 10	2
ウエ	25	2
オカ	12	2
キク	14	2
ケコ	65	3
サシスセ	4595	3
ソタチツテ	21515	3
トナニヌ	4615	3

20点